

MODELADO Y SIMULACIÓN DE CONTROL DE UNA AERONAVE TIPO
CUADRICÓPTERO

ELABORADO POR:
FEDERICO GUTIÉRREZ MADRID
CÓDIGO: 1088327489
CORREO: fede9506@utp.edu.co
TELÉFONO: 3122503888

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA
INGENIERÍA MECÁNICA
PEREIRA
2018

INDICE

Glosario	4
1.introducción.....	5
1.1.Planteamiento del problema	5
1.2.Justificación	6
1.3.Objetivos.....	6
1.3.1.Objetivo general:.....	6
1.3.2.Objetivos específicos:	6
1.4.Estructura del documento	7
2.Metodología y experimentos	8
2.1.Descripción de un cuadricóptero	8
2.1.1.Componentes mecánicos de un cuadricóptero.....	9
2.1.2.Componentes electrónicos de un cuadricóptero	10
2.1.3.Sensores comunes usados en los cuadricópteros	12
2.1.4.Funcionamiento de un cuadricóptero.....	14
2.2.Modelo cinemático directo de posición y orientación del cuadricóptero	16
2.2.1.Determinación del tensor de inercia y valor de masa para los elementos del cuadricóptero	17
2.2.2.Matriz de transformación de la aeronave con respecto a la coordenada inercial.....	19
2.2.3.Ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad de la aeronave	20
2.3.Modelo dinámico del cuadricóptero	21
2.3.1.Fuerzas y pares generados	21
2.3.2.Fuerzas y pares externos	24
2.3.3.Modelo de traslación.....	25
2.3.4.Modelo rotacional	25
2.4.Simulación de control por lógica difusa	29
2.4.1.Lógica difusa.....	29
2.4.2.Sistema de control por lógica difusa.....	29
2.4.3.Definición de arquitectura de control	31
2.4.4.Definición de parámetros del sistema de control difuso.....	33
2.4.5.Cuantificación de PWM a partir de las salidas del control difuso.....	34

2.4.6.Actualización de la posición y orientación del cuadricóptero (obtención de soluciones para las ecuaciones del modelo dinámico)	34
3.Resultados	35
3.1.Simulación del modelo dinámico	35
3.2.Simulación de control por lógica difusa	37
4.Conclusiones, recomendaciones y aportes	40
4.1.Conclusiones.....	40
4.2.Aportes	40
4.3.Recomendaciones	41
Bibliografía.....	42

GLOSARIO

- A_x, A_y, A_z : Fuerzas aerodinámicas (Arrastre)
- B : Sistema coordenado fijo a la aeronave
- D : Diámetro de las hélices
- h : Operador de desplazamiento
- I : Sistema coordenado inercial
- J : Tensor de inercias de la aeronave en el sistema I
- J_η : Tensor de inercias de la aeronave en el sistema B
- K_P : Coeficiente de potencia de la hélice C_P
- K_Q : Coeficiente de torsión de la hélice C_Q
- K_T : Coeficiente de empuje de la hélice C_T
- l : Distancia para el cálculo de los momentos producidos por el empuje
- L : Lagrangiano
- N_i : i-ésima velocidad de rotación de los motores [RPM]
- q_i : i-ésima coordenada generalizada del sistema
- Q_i : Pares de torsión generados por las hélices
- S_i : Área de influencia aerodinámica
- T : Energía cinética del sistema.
- U_1 : Empuje total de la aeronave
- U_2, U_3, U_4 : Pares generados por el empuje de los motores y su giro.
- V : Energía potencial del sistema.
- W : Matriz Jacobiana que relaciona las velocidades angulares definidas en B con I
- β : Factor de fricción viscosa del cuadricoptero con el aire
- Γ_i : Fuerzas o momentos desbalanceados
- ϕ : Ángulo de Roll o alabeo
- θ : Ángulo de Pitch o cabeceo
- ψ : Ángulo de Yaw o guiñada
- ρ : Densidad del aire (Se toma con un valor de $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$)
- ξ : Vector de posición
- η : Vector de ángulos de Euler

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha expandido el uso de aeronaves no tripuladas alrededor del mundo, llamadas UAVs por sus siglas en inglés (Unmanned Aerial Vehicles), siendo manejados remotamente, por una persona y en ocasiones, gracias a los avances en las áreas de la inteligencia artificial, se ha conseguido que estas aeronaves se desplacen de un punto a otro del espacio de forma autónoma, controlando su estabilidad y evadiendo obstáculos. Se han desarrollado para ser herramientas muy versátiles, de diversos tamaños y formas, siendo útiles para realizar trabajos que podrían ser peligrosos o muy costosos para el hombre. Se han usado para el envío de mensajes y paquetes, equipos de búsqueda y rescate, reconocimiento de lugares [11] y mapeado 3D, extinción de incendios forestales [12], fotografías y grabaciones aéreas, inteligencia militar y ataques aéreos, inspección de edificios, incluso como juguetes o aeromodelos deportivos.

Una clase muy popular entre las aeronaves no tripuladas son los helicópteros de cuatro rotores, también llamados cuadricópteros, quadcopters, o quadrotores, los cuales presentan una simplicidad y eficiencia considerable frente a las demás UAVs en diversas aplicaciones, esto gracias a su distribución geométrica, a la estabilidad y eficiencia que pueden alcanzar sin necesidad de un gran número de entradas motrices.

1.1. Planteamiento del problema

Los cuadricópteros hoy en día se encuentran en auge en todo el mundo, marcando la posibilidad de expandir el rango de aplicaciones gracias a las constantes investigaciones, sin embargo adquirir una de estas aeronaves presenta dificultades, ya que a la hora de implementar una estrategia de control deseada, no se conocen sus características físicas, el sistema mecánico, electrónico o de control que permite su funcionamiento, es decir, son cajas negras; permitiendo, únicamente, ser manipuladas con un control preestablecido.

Para construir e iniciar un proceso de control de estas aeronaves se requiere realizar un conjunto de tareas independientes de diseño o selección de elementos. Adicionalmente, es común encontrar complicaciones a la hora de abordar la etapa de control, causadas en parte por el desconocimiento del comportamiento físico y de la influencia de parámetros cinemáticos y cinéticos; por lo que el

modelo matemático, del cual dependerá el control de la aeronave, no describirá adecuadamente el sistema, llevando a errores de funcionamiento, accidentes y un trabajo de control más complejo.

Lo anterior lleva a afirmar la existencia de una necesidad en conocer a fondo las bases del funcionamiento físico y tecnológico de esta aeronave, para entrar de esta manera en el campo de investigación moderna que envuelve el conocimiento de ella.

1.2. Justificación

En la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Tecnológica de Pereira no se ha llevado a cabo investigaciones sobre robótica móvil en aeromodelos, a pesar de que estas aeronaves han conseguido una acogida positiva comercialmente y que la profundización en su control es un campo de investigación importante en la actualidad. Causado por el poco conocimiento de los estudiantes sobre ellas y la inexperiencia investigativa en el área por parte de la mayoría de docentes.

Por lo anterior, se ha tratado de que en este documento se evidencie el funcionamiento mecánico, electrónico y de control de una aeronave no tripulada tipo cuadricóptero; haciendo énfasis en el comportamiento dinámico de estos sistemas y el modelo matemático que los describe, detallando la importancia de sus distintos parámetros cinemáticos y cinéticos, junto con métodos para determinarlos correctamente; y así abrir el campo de investigación en robótica móvil y aeromodelismo en la Facultad.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general:

- Modelar dinámicamente una aeronave no tripulada de cuatro rotores por medio de herramientas computacionales para la implementación de sistemas de control.

1.3.2. Objetivos específicos:

- Describir el sistema del cuadricóptero considerando aspectos estructurales, electrónicos y mecánicos.

- Determinar el tensor de inercia y los valores de la masa para los elementos que componen el sistema del cuadricóptero
- Obtener el modelo cinemático directo de posición del cuadricóptero con el fin de determinar su posición y orientación.
- Determinar el modelo dinámico del cuadricóptero utilizando la formulación Lagrange-Euler
- Aplicar la estrategia de control por lógica difusa en el modelo virtual del cuadricóptero.

1.4. Estructura del documento

El capítulo 2 aborda en su totalidad los objetivos específicos en el orden presentado, mostrando en primera instancia la información necesaria para la comprensión de los elementos constituyentes de una aeronave no tripulada, en particular, los cuadricópteros, realizando una detallada explicación del funcionamiento mecánico, electrónico y de control de estos componentes. Posteriormente se realiza un modelo 3D de la aeronave por medio de ingeniería inversa para determinar su distribución de masa. A continuación se establece un modelo cinemático que permite definir, con respecto a un marco de referencia inercial, la posición, orientación y velocidad de una aeronave, haciendo uso del método de ángulos de Euler para ello. Más adelante, se definen dos modelos dinámicos para describir el sistema del cuadricóptero por medio de la metodología Lagrange-Euler, diferenciándose por el tensor de inercias que define la distribución de masa de la aeronave y detallando la importancia de sus distintos parámetros cinemáticos y cinéticos, junto con métodos para determinarlos. Finalmente se introduce la estrategia de control por lógica difusa con el objetivo de simular computacionalmente la estabilización de la aeronave, comparar el comportamiento de ambos modelos dinámicos y justificar o no el uso del modelo más simple de estos.

En el capítulo 3 son mostrados los resultados de las simulaciones realizadas con las herramientas computacionales Matlab y LabView de los modelos dinámicos y de control de la aeronave, indicando la influencia de las diferencias entre los dos modelos dinámicos definidos.

Por último en el capítulo 4 se concluye y se abre paso a nuevas investigaciones a partir de la información y resultados presentados anteriormente.

2. METODOLOGÍA Y EXPERIMENTOS

2.1. Descripción de un cuadricóptero

Los cuadricópteros son un conjunto de elementos electromecánicos y estructurales, que han sido diseñados con el objetivo de aprovechar los conocimientos aerodinámicos nacidos del vuelo de helicópteros y los conocimientos de robótica móvil, para permitir el vuelo de una aeronave capaz de ser utilizada no solo como entretenimiento, como el caso de los considerados aeromodelos, sino como una herramienta. En la figura 1 se muestra un ejemplo típico de la disposición estructural de estas aeronaves al ser construidas.

Figura 1. Cuadricóptero



Fuente: <http://cuadricoptero.org/wp-content/uploads/2014/03/Cuadricoptero.jpg>

2.1.1. Componentes mecánicos de un cuadricóptero

- **Estructura:** también llamada esqueleto del cuadricóptero, es aquella en la que se ensamblan o reposan las demás partes del cuadricóptero. Suele tener diversos diseños, sin embargo, está basada en un cuerpo central y cuatro brazos iguales, distribuidos en ángulos, la gran mayoría de las veces, de 90 grados circunferencialmente sobre el plano horizontal.

La estructura debe ser rígida, ligera, aerodinámica, debe soportar las vibraciones producidas por los motores y poseer el tamaño y la geometría adecuada para posicionar todos los componentes electrónicos. Por ello los materiales más usados son polímeros moldeados, aunque en algunos casos utilizan metales livianos o maderas.

- **Hélices:** como el nombre de la aeronave lo dice, posee cuatro de éstas, dándole mayor estabilidad que un helicóptero. Las hélices, gracias a sus cualidades aerodinámicas, se encargan de producir la fuerza vertical, llamada empuje, que permite elevar o girar la aeronave. Puede entenderse entonces que son elementos esenciales y han de escogerse cuidadosamente.

Existen diversos tipos de hélices en el mercado, cada una diseñada para distintos tipos de motores y modos de vuelo. Su material es comúnmente plástico o fibra de carbono y las principales características de éstas son diámetro, paso y forma. Comúnmente se utilizan hélices de 2 álabes, también llamados palas o aspas, sin embargo, en ocasiones se pueden encontrar de más álabes si es necesario producir una fuerza de empuje mayor sacrificando la eficiencia.

Su tamaño se expresa en pulgadas; una hélice de 8×4 tiene 8 pulgadas de diámetro por 4 pulgadas de paso. Cuanto mayor es el diámetro mayor es la tracción y menor la velocidad. Cuanto mayor es el paso menor es la tracción y mayor la velocidad.

El paso de una hélice es el ángulo que forman los álabes con respecto a la dirección del aire en relación a la aeronave. A diferencia de las hélices de paso grande que aportan mejor rendimiento en el vuelo y son adecuadas para vuelos rápidos, un paso pequeño aporta mejor rendimiento en el despegue y en subidas, por lo que son mejores para vuelos lentos. [21]

Cabe resaltar las implicaciones de estas características a la hora de controlar la aeronave, por ejemplo, un cuadricóptero de velocidad mayor requerirá un control más robusto para estabilizar la aeronave. Por esto, las hélices de un cuadricóptero, tal como para aeromodelismo en general, son comúnmente diseñadas para baja velocidad (paso pequeño).

- **Motores:** se encargan de producir la fuerza motriz que hace girar las hélices. Éstos se posicionan en los extremos de cada brazo del cuadricóptero bajo las hélices.

Los más utilizados para esta aplicación son los motores DC brushless (sin escobillas), compuestos por un rotor con imanes permanentes que gira en torno al estator.

Al no tener escobillas, tienen gran eficiencia y pueden alcanzar muy altas velocidades sin embargo, la alimentación correcta y control de la velocidad de este motor trifásico se convierte en un reto, para lo cual se han desarrollado los controladores electrónicos de velocidad (ESC) a los cuales se les envía información de la posición de los imanes por medio de sensores de efecto Hall, encoders o la medición de la fuerza contra electromotriz (en el caso de motores brushless sensorless). [22]

La característica con la que se identifican comercialmente los motores brushless es la constante KV, que indica el número de revoluciones por minuto por cada volt en vacío (RPM/V). Si se desea una aeronave veloz, acrobática, es aconsejable utilizar un motor con un KV alto, el cual tendrá un mayor consumo energético. Un KV bajo significa un par más alto y es adecuado para una aeronave en la cual predomine la estabilidad sobre la velocidad.

2.1.2. Componentes electrónicos de un cuadricóptero

- **Controlador electrónico de velocidad (ESC):** son circuitos electrónicos programables, los cuales pueden soportar alta corriente. Se clasifican en dos tipos:
 - a) ESC para motores brushed
 - b) ESC para motores brushless.

Los ESC para motores brushless se encargan de tomar el voltaje constante de la batería y enviarlo a dos de las tres fases de un motor, una producirá una fuerza de repulsión y la otra de atracción sobre los imanes, determinando que fase alimentar gracias a la información recolectada del motor. El ESC recibirá pulsos de anchura modulada (PWM) desde el microcontrolador y variará la frecuencia de salida al motor en función de la longitud de pulso recibida. La selección de los ESC dependerá del voltaje de la batería y los motores a controlar, recordando que se necesitará uno por cada motor.

- **Batería:** la fuente de alimentación eléctrica de la aeronave que se utiliza hoy en día son las baterías Lipo (Polímero de Litio) cuyas características más importantes son [23]:
 - **Energía específica:** es la propiedad que define cuánta energía es posible almacenar por kg de batería. Se mide en Wh/kg. Entre más alto sea el valor, más adecuada será la batería para la aeronave ya que este elemento suele ser uno de los más pesados de la aeronave.
 - **Capacidad:** o carga eléctrica almacenada, se suele medir en mA*h. Esta característica determina la autonomía de vuelo, teniendo en cuenta que el aumento no será lineal ya que a medida que aumenta la capacidad aumentará el peso de la batería, y en consecuencia obligará a un mayor gasto energético al aumentar el peso total de la aeronave.
 - **Constante de carga y descarga:** esta propiedad es la que determina la selección de una batería Lipo específica para la aeronave y que excluye el uso de otro tipo de batería ya que los motores brushless requieren una corriente muy alta y las Lipo son las que mejor cumplen con este requerimiento. Suele denotarse en la unidad “C”(1/h). La intensidad máxima que puede entregar la batería se define como el producto entre C de descarga y la capacidad (3000 mAh 40C: 120 Amperes de corriente máxima).
 - **Tensión:** un voltaje mayor permitirá una velocidad de rotación máxima mayor de los motores. El voltaje nominal de una celda Lipo es 3,7 V. Y el voltaje nominal en terminales de la batería tendrá un valor discreto en función del número de celdas serie que posea, indicado con la nomenclatura S (2S: 7,4 V). Como es sabido el voltaje en terminales de

una batería decae a medida que se descarga, sin embargo en las baterías Lipo esta es una característica crítica y no se debe permitir que el voltaje por celda disminuya a menos de 3 V pues esto dañará irreparablemente la batería. Por lo que comúnmente los ESC poseen un BEC (Battery Eliminator Circuit) que se encarga de la protección de la batería.

- **Microcontrolador:** es el cerebro de la aeronave; su selección dependerá de múltiples factores, incluyendo, la capacidad de procesamiento requerida por la estrategia de control a utilizar, lenguaje de programación, los sensores escogidos y la velocidad de vuelo.
- **Módulos de comunicación:** los elementos de comunicación que se adaptan o que ya tienen incluidos las placas de los microcontroladores permiten enviar y recibir datos de la aeronave con el fin de conocer el estado de sus variables así como controlarla remotamente, aunque actualmente esta comunicación no se lleva a cabo únicamente entre humano y aeronave, también entre múltiples aeronaves. Los módulos de comunicación más utilizados para esta tarea son:
 - Módulo wifi
 - Módulo radio
 - Módulo bluetooth

2.1.3. Sensores comunes usados en los cuadricópteros

A la hora de escoger los sensores, o elementos que servirán como entradas para el sistema de control del cuadricóptero, se deben tener en cuenta los sensores básicos, indispensables para estabilizar el cuadricóptero y aquellos que son útiles para aplicaciones específicas o que mejoran la respuesta del sistema.

Entre los elementos básicos se encuentra:

- **Giroscopio:** este elemento permite medir la velocidad angular en un eje, el rango de este sensor viene dado comercialmente en grados por segundo ($^{\circ}/s$). Si se desea una aeronave de alta velocidad el rango de este sensor deberá ser mayor. [24]

- **Acelerómetro:** dispositivo electromecánico que produce un cambio de voltaje de salida al ocurrir un cambio en la aceleración en un eje. Una aeronave de alta velocidad presentará cambios bruscos de orientación y dirección, razón por la cual requiere un acelerómetro con un rango más amplio, comúnmente se denota el rango de estos elementos en gravedades (g). [25]

Después de estos, los elementos más comunes son:

- **Magnetómetro:** elemento que permite determinar la orientación absoluta de la aeronave por medio de la medición de flujo del campo magnético de la tierra.

Presenta la ventaja de no tener que pasar por el modelo matemático para determinar la orientación, sin embargo, la frecuencia de muestreo es baja en comparación con el giroscopio y el acelerómetro. Por otra parte, es necesario denotar que la calibración de este elemento es compleja ya que la orientación y magnitud del campo magnético terrestre varía según la posición geográfica y se ve afectado por la naturaleza magnética de la topografía, la presencia de la civilización y adicionalmente, la aeronave produce (con los motores) un campo variable que afecta la medición.

- **GPS:** permite determinar las coordenadas espaciales absolutas de la aeronave, latitud, longitud y altura. La precisión de este elemento puede oscilar entre algunas decenas de centímetros hasta decenas de metros variando en gran medida su precio en función de la precisión. Sin embargo, su utilidad y constante uso en aplicaciones de vuelo de grandes distancias es indiscutible.
- **Altímetro barométrico:** elemento de bajo costo utilizado para vuelos a campo abierto, permite determinar la altura de vuelo midiendo la presión atmosférica, comúnmente con un error menor a medio metro.
- **Sensor ultrasónico:** es utilizado para medir la distancia desde la aeronave hasta un obstáculo ubicado normal al sensor, tiende a usarse para el aterrizaje de la aeronave o vuelo en lugares cerrados con el fin de evitar una colisión.

- **Cámara:** es el principal elemento en la investigación y desarrollo de aeronaves inteligentes, viéndose implicado en la mayoría de aplicaciones actuales, utilizado tanto en el control avanzado de la aeronave como en la toma de fotografías y videos aéreos para múltiples aplicaciones.

2.1.4. Funcionamiento de un cuadricóptero

En la Figura 2.1 los motores 1 y 3 giran en sentido antihorario y los motores 2 y 4 en sentido horario, sin embargo en lugar de representar el sentido de giro, se representa la dirección del momento generado (el cual es opuesto al sentido de giro); este diseño se utiliza para equilibrar los momentos generados por cada motor. Si se requiere que el cuadricóptero se desplace verticalmente todos los motores deben aumentar o disminuir su velocidad para ascender o descender, respectivamente. Si se desea que el cuadricóptero se desplace lateralmente, movimiento que posee el nombre de roll (alabeo), debe ser aumentada la velocidad de los motores 2 o 4 para desplazar la aeronave hacia la derecha (figura 2.2), o izquierda, respectivamente; esto funciona de forma homóloga para el desplazamiento frontal o pitch (cabeceo). Finalmente, para un giro en su eje vertical o yaw (guiñada), debe ser aumentada la velocidad de los motores 2 y 4 (figura 2.3) y disminuida la de los motores 1 y 3 o viceversa.

Figura 2.1. Esquema de giro de hélices del cuadricóptero y vista superior del modelo tridimensional.

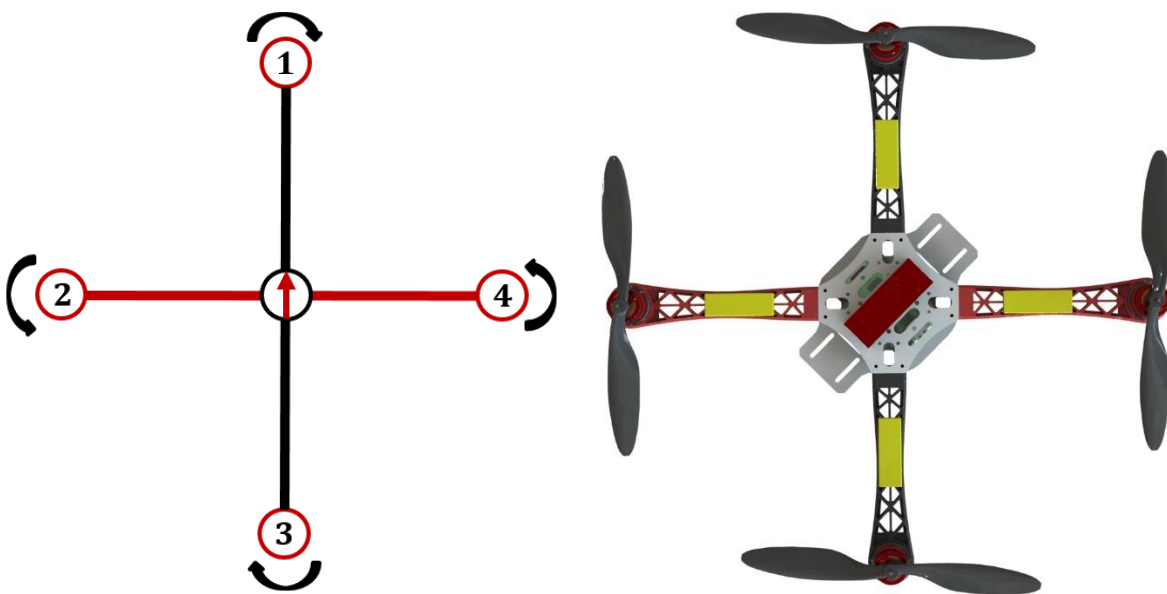


Figura 2.2. Esquema de giro de las hélices del cuadricóptero y vista lateral del modelo tridimensional para un desplazamiento hacia la derecha

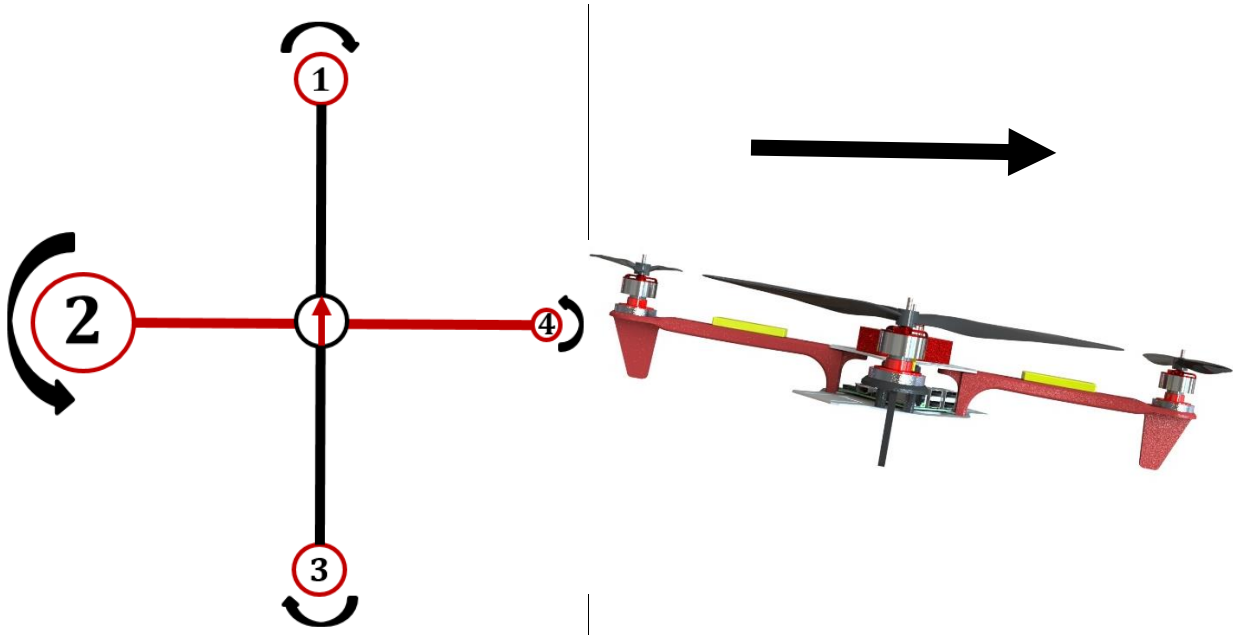
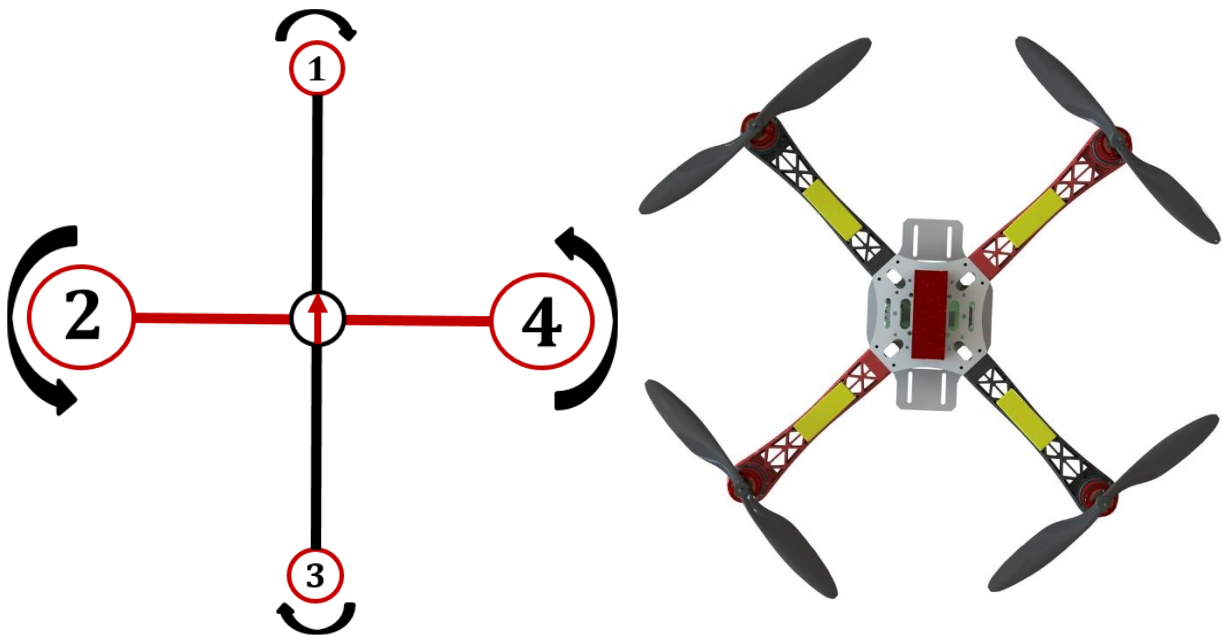


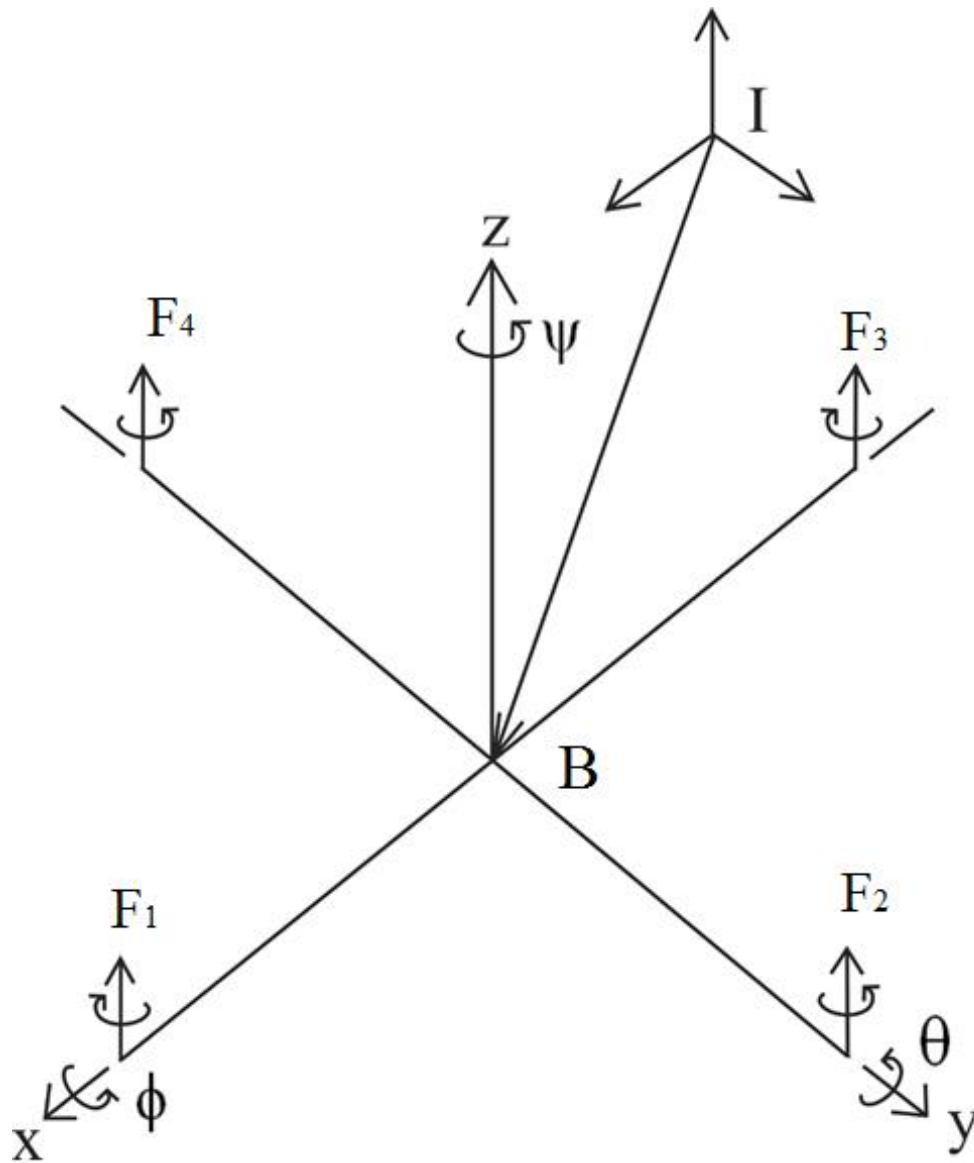
Figura 2.3. Esquema de giro de hélices del cuadricóptero y vista superior del modelo tridimensional del mismo para un giro de 45 grados en sentido antihorario.



2.2. Modelo cinemático directo de posición y orientación del cuadricóptero

El cuadricóptero es un sistema dinámico de seis grados de libertad los cuales son manipulados para dar desplazamiento y rotación por medio de cuatro fuerzas en dirección positiva del eje z del cuadricóptero y cuatro pares torsores, dos en sentido horario y dos en sentido antihorario, en torno a su eje z local, producidos por la rotación de las hélices.

Figura 3. Diagrama del cuadricóptero y convención en la distribución de ejes coordenados y sistemas de referencias



2.2.1. Determinación del tensor de inercia y valor de masa para los elementos del cuadricóptero

Se determina cuáles son las piezas más representativas en términos funcionales y de masa del cuadricóptero, indicándose a continuación:

- a) Estructura
- b) Motores
- c) Hélices
- d) ESC
- e) Batería
- f) Microcontrolador

Se realiza la identificación de la masa de estos elementos por medio de una balanza de precisión y los valores se consignan en la tabla 1:

Tabla 1. Valores de las masas de los elementos constituyentes del cuadricóptero

Elementos	Masa [g]
Brazos rojos	45,9
Brazos negros	47,9
Lamina estructural superior	21,9
Lamina estructural inferior	41,1
ESC	25
Microcontrolador Raspberry PI 2	42,7
Hélices	7,1
Batería	115,2
Motores	48,1
Acoples para los motores	12,6

Masa total del cuadricóptero según los elementos anteriormente listados: **780,7 g**

Utilizando un escáner 3D, tecnología handyscan, proporcionado por tecnoparque nodo Pereira, se obtienen las mallas de los elementos y se procesan con el fin de realizar ingeniería inversa para el modelado 3D final del cuadricóptero por medio del programa de diseño asistido por computador Solidworks.

Se realiza un ensamble del cuadricóptero en Solidworks y de esta manera se determina su distribución de masa aproximada en forma del tensor de inercia.

$$J = \begin{pmatrix} 10538034 & 8673 & -37270 \\ 8673 & 20337501 & -5594 \\ -37270 & -5594 & 10389848 \end{pmatrix} \quad \left[\frac{g}{mm^2} \right]$$

Figura 4. Ensamble del cuadricóptero realizado en SolidWorks



2.2.2. Matriz de transformación de la aeronave con respecto a la coordenada inercial

Para obtener el modelo cinemático directo se debe determinar la matriz de rotación y translación desde el sistema coordenado inercial al sistema coordenado local del centro de masa del cuadricóptero. Para esto se decidió utilizar los ángulos de Euler.

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C(\phi) & -S(\phi) \\ 0 & S(\phi) & C(\phi) \end{bmatrix} ; \mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} C(\theta) & 0 & S(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -S(\theta) & 0 & C(\theta) \end{bmatrix} ; \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} C(\psi) & -S(\psi) & 0 \\ S(\psi) & C(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^1$$

La convención de ángulos de navegación o ángulos de Tait-Bryan, al ser comunes en este tipo de modelos aeronáuticos, son los escogidos.

Los ángulos Tait-Bryan Yaw, Pitch, Roll se notan como z , y' , x'' , por rotación intrínseca, realizando tres rotaciones consecutivas en los ejes de marco de referencia B , una rotación inicial en el eje z , o guiñada, una rotación en el eje y , o cabeceo, y finalmente una rotación en el eje x , o alabeo; los cuales están determinados respectivamente por los ángulos ψ , θ y ϕ .

$$\mathbf{R}_I = \begin{bmatrix} C(\psi) & -S(\psi) & 0 \\ S(\psi) & C(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C(\theta) & 0 & S(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -S(\theta) & 0 & C(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C(\phi) & -S(\phi) \\ 0 & S(\phi) & C(\phi) \end{bmatrix}$$

Después de realizar estas rotaciones se llega a la siguiente matriz de rotación, la cual relaciona el marco de referencia inercial I con el marco de referencia unido a la aeronave B :

$$R_I = \begin{bmatrix} C(\psi) C(\theta) & C(\psi) S(\phi) S(\theta) - C(\phi) S(\psi) & S(\phi) S(\psi) + C(\phi) C(\psi) S(\theta) \\ C(\theta) S(\psi) & C(\phi) C(\psi) + S(\phi) S(\psi) S(\theta) & C(\phi) S(\psi) S(\theta) - C(\psi) S(\phi) \\ -S(\theta) & C(\theta) S(\phi) & C(\phi) C(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{Ec.1}$$

¹ En las ecuaciones se ha abreviado para indicar las funciones Seno y Coseno como $S()$ y $C()$

2.2.3. Ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad de la aeronave

Utilizando la matriz de rotación R_I se puede determinar la posición de un punto r_B perteneciente al sistema coordenado B, en el sistema coordenado I, el cual se denotará como ξ .

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_I \times \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} \quad \text{Ec.2}$$

Así mismo la velocidad de la aeronave expresada en el sistema coordenado I, $\dot{\xi}$ puede ser determinada a partir de la velocidad absoluta de la aeronave en el sistema B.

$$\dot{\xi} = R_I \times \dot{r}_B \quad \text{Ec.3}$$

Adicionalmente, las características de ortonormalidad de las matrices de rotación permiten definir una relación entre el cambio de los ángulos Tait-Bryan en el tiempo $\dot{\eta} = [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T$ y las velocidades angulares definidas en I, denominada $\omega = [p \quad q \quad r]^T$.

$$R_I^T R_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{R}_I^T R_I + R_I^T \dot{R}_I = 0_3 \quad \text{Ec.4 [17]}$$

Encontrando una relación de antisimétrica se define una matriz $S(\omega)$, antisimétrica denominada matriz de Euler [17].

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} = R_I^T \dot{R}_I \quad \text{Ec.5 [17]}$$

Relacionando las componentes de estas matrices se determina la siguiente relación en la cual la matriz acompañada de $\dot{\eta}$ se define como el Jacobiano \mathbf{W} que relaciona las velocidades angulares en los sistema I y B

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S(\theta) \\ 0 & C(\phi) & S(\phi)C(\theta) \\ 0 & -S(\phi) & C(\phi)S(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \rightarrow \omega = \mathbf{W}\dot{\eta} \quad \text{Ec.6 [17]}$$

2.3. Modelo dinámico del cuadricóptero

Para la determinación del modelo dinámico del sistema se utilizó la metodología Lagrange-Euler, que se basa en la ecuación 7.

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{Ec.7}$$

Donde L es el Lagrangiano: $L = T - V$

Así, formalmente se define las coordenadas generalizadas q_i , que para el caso del cuadricóptero se han tomado tres coordenadas de traslación (x, y, z) y tres coordenadas de rotación (ϕ, θ, ψ).

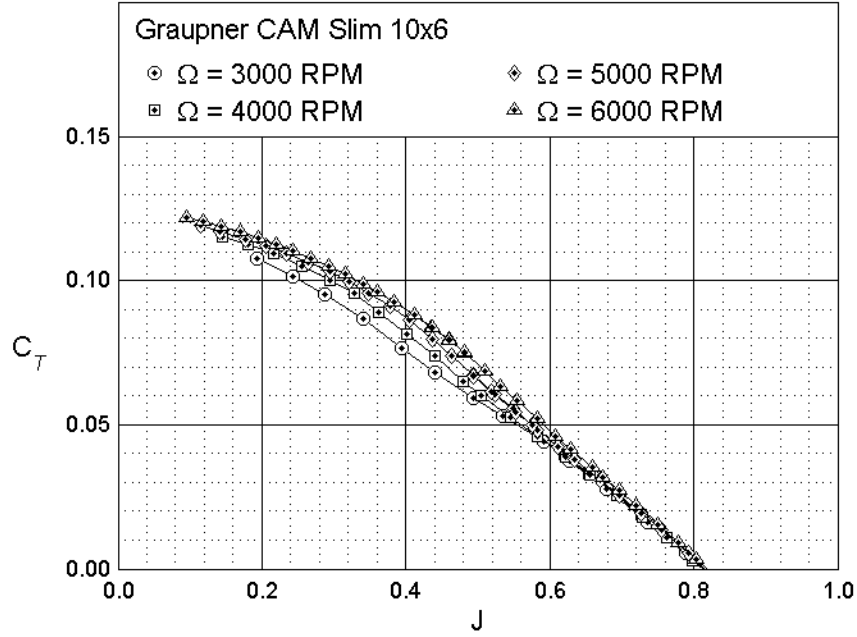
2.3.1. Fuerzas y pares generados

El empuje generado por las hélices, fuerza que es paralela al eje z de la aeronave, será denotada como F_i y su cálculo está determinado a continuación:

$$F_i = \frac{K_T \rho D^4}{3600} \cdot N_i^2 \quad \text{Ec.8 [16]}$$

El empuje y torque producidos por la rotación de las hélices son valores difíciles de cuantificar con precisión a causa del coeficiente de empuje (K_T) de las hélices seleccionadas. Este coeficiente aerodinámico es comúnmente determinado de manera experimental y varía según el paso, el diámetro, el material, acabado y geometría de las hélices. Adicionalmente es un valor que se ve influido por la velocidad lineal de la aeronave, hecho importante en el caso de aeronaves de alta velocidad.

Figura 5. Gráfica experimental coeficiente de empuje contra la relación de velocidad J.



Fuente: UIUC Propeller data site [20]

Por lo tanto se toma un coeficiente constante de referencia de acuerdo con los valores de paso y diámetro de la hélice comercial modelada anteriormente. Este coeficiente se escoge de un valor de 0,1 por lo que el empuje por hélice queda de la siguiente forma.

$$F_i = (1,157 \cdot 10^{-7}) \cdot N_i^2 \quad N_i: [RPM]$$

De esta manera puede ser determinado el empuje total generado mediante la ecuación 9.

$$U_1 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \quad \text{Ec.9}$$

Así mismo el empuje de cada hélice produce un momento que se calcula con respecto al centro geométrico de la aeronave, por lo que el brazo de cada uno de los momentos generados se considera idéntico y se denota como l .

$$U_2 = (F_2 - F_4) \cdot l \quad U_3 = (F_3 - F_1) \cdot l \quad \text{Ec.10}$$

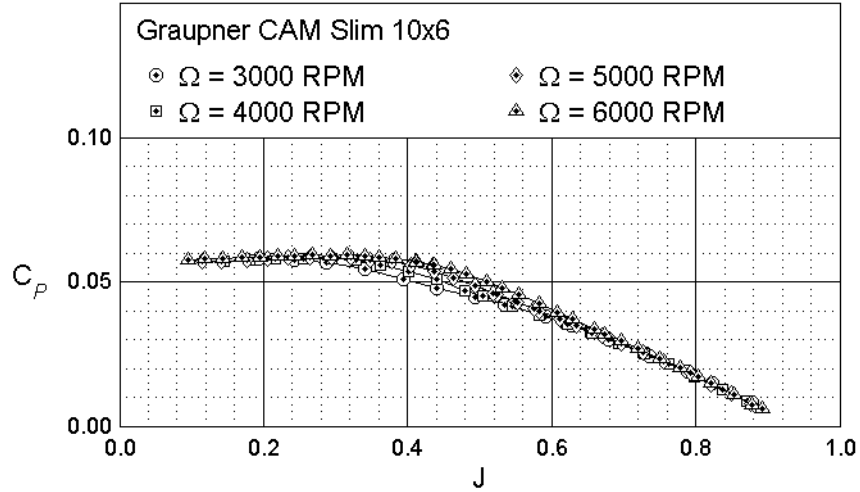
Por otra parte, el giro de las hélices produce pares de torsión, resultando en un momento total en el eje z de la aeronave, cada uno de esos pares es notado como τ_i y el total como U_4 .

$$Q_i = \frac{K_Q \rho D^5}{3600} \cdot N_i^2 \quad \text{Ec.11 [16]}$$

Este momento está determinado por un coeficiente K_Q cuantificable de forma experimental y es característico de cada hélice, así como el coeficiente de empuje, por lo cual se tomará de la gráfica de la figura 6 utilizando la siguiente relación. [20]

$$K_Q = \frac{K_P}{2\pi}$$

Figura 6. Gráfica experimental coeficiente de potencia contra la relación de velocidad J.



Fuente: UIUC Propeller data site [20]

A partir de las características de la hélice se toma $K_P = C_P = 0,06$ dejando la torsión por motor de la siguiente forma.

$$Q_i = (3,646 \cdot 10^{-9}) \cdot N_i^2$$

$$U_4 = Q_2 + Q_4 - Q_1 - Q_3 \quad \text{Ec.12}$$

2.3.2. Fuerzas y pares externos

Naturalmente la principal fuerza externa que debe vencer el cuadricóptero es su propio peso, el cual se considera como una fuerza en sentido negativo del eje z.

Sobre la aeronave influyen fuerzas y pares aerodinámicos los cuales son proporcionales a la densidad del aire, a la velocidad de la aeronave con respecto al aire, el área de influencia del aire y a coeficientes aerodinámicos según la geometría de la aeronave.

$$A_x = \frac{1}{2} \rho C_x S_x \dot{x}_a^2 \quad A_y = \frac{1}{2} \rho C_y S_y \dot{y}_a^2 \quad A_z = \frac{1}{2} \rho C_z S_z \dot{z}_a^2 \quad \text{Ec.13 [16]}$$

Naturalmente el sistema en la realidad sufre la influencia de corrientes de viento que no es posible predecir por lo que se dificulta determinar con precisión la velocidad real de la aeronave con respecto al aire circundante. Por esta razón la velocidad con respecto al aire queda reducida a la velocidad absoluta de la aeronave. Adicionalmente el coeficiente aerodinámico o de arrastre en el presente caso, depende de la geometría de la aeronave y su cálculo se realiza por medio de ensayos en túnel de viento, por lo que para las simulaciones se utilizará un coeficiente de la literatura junto con el área S como un solo coeficiente para los cálculos. $C_d = 0,02$ [18]

Se ha definido entonces la magnitud de esta fuerza aerodinámica, sin embargo su sentido es siempre en dirección opuesta a la velocidad del aire con respecto a la aeronave, por lo que en el modelo actual se considera opuesta al movimiento.

$$A_x = -\frac{1}{2} \rho C_d \dot{x} |\dot{x}| \quad A_y = -\frac{1}{2} \rho C_d \dot{y} |\dot{y}| \quad A_z = -\frac{1}{2} \rho C_d \dot{z} |\dot{z}| \quad \text{Ec.14 [16]}$$

Adicionalmente se ha concebido un modelo simple de fricción viscosa con el aire, proporcional a la velocidad lineal de la aeronave y un factor de fricción que se ha tomado de la literatura.

$$F_f = -\beta \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad \beta = 0,25 \quad \text{Ec.15 [19]}$$

2.3.3. Modelo de traslación

Este modelo se define por un sistema de tres ecuaciones con las coordenadas generalizadas de traslación anteriormente definidas, expresado inicialmente por la ecuación 16.

$$\mathbf{F}_\xi = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} \quad \text{Ec.16}$$

Donde

$$F_\xi = R_I \mathbf{U}_1 + A \quad \xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Se determina el Lagrangiano para la energía cinética y potencia de traslación del sistema a partir de la ecuación 17.

$$L = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} - mgz \quad \text{Ec.17}$$

Finalmente, modelo se reduce a la ecuación 18.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{U_1}{m} \begin{bmatrix} C(\psi)S(\theta)C(\phi) + S(\psi)S(\phi) \\ S(\psi)S(\theta)C(\phi) - C(\psi)S(\phi) \\ C(\theta)C(\phi) - \frac{g}{U_1} \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} - \frac{\beta}{m} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad \text{Ec.18}$$

2.3.4. Modelo rotacional

El modelo rotacional se rige por un sistema de tres ecuaciones de las coordenadas generalizadas rotacionales para la metodología Lagrange-Euler, expresada inicialmente con la ecuación 19.

$$\boldsymbol{\tau}_\eta = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta} \quad \text{Ec.19}$$

En el caso del modelo rotacional, tomando el cuadricóptero como un cuerpo rígido, el sistema solo posee energía cinética rotacional. Ya que el tensor de inercias está definido con respecto al sistema coordinado inercial y se desea definir el modelo en los ángulos Tait-Bryan del sistema, se requiere relacionar por medio del Jacobiano \mathbf{W} el tensor de inercias en B .

$$\mathbf{J}_\eta = \mathbf{W}^T \mathbf{J} \mathbf{W} \quad \text{Ec.20}$$

$$L = T_{Rot} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathbf{J}_\eta \dot{\eta} \quad \text{Ec.21}$$

Reduciendo finalmente el modelo a la siguiente forma

$$\mathbf{M}(\eta) \ddot{\eta} = \tau_\eta - \mathbf{C}(\eta, \dot{\eta}) \quad \text{Ec.22}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$$

En el primer caso se toman en cuenta los productos inerciales que hacen parte del tensor de inercias del sistema del cuadricóptero, este caso se muestra a continuación junto con el tensor de inercias que se ha supuesto.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = I_{xx}$$

$$M_{12} = I_{xz} S(\phi) - I_{xy} C(\phi)$$

$$M_{13} = -I_{xx} S(\theta) - C(\theta) (I_{xz} C(\phi) + I_{xy} S(\phi))$$

$$M_{21} = I_{xz} S(\phi) - I_{xy} C(\phi)$$

$$M_{22} = I_{yy} C(\phi)^2 + 2 I_{yz} C(\phi) S(\phi) + I_{zz} S(\phi)^2$$

$$M_{23} = (I_{yy} - I_{zz}) C(\phi) C(\theta) S(\phi) + S(\theta) (I_{xy} C(\phi) - I_{xz} S(\phi)) - I_{yz} C(\theta) (C(\phi)^2 - S(\phi)^2)$$

$$M_{31} = -I_{xx} S(\theta) - C(\theta) (I_{xz} C(\phi) + I_{xy} S(\phi))$$

$$M_{32} = (I_{yy} - I_{zz}) C(\phi) C(\theta) S(\phi) + S(\theta) (I_{xy} C(\phi) - I_{xz} S(\phi)) - I_{yz} C(\theta) (C(\phi)^2 - S(\phi)^2)$$

$$M_{33} = I_{xx} S(\theta)^2 + C(\theta)^2 (I_{yy} S(\phi)^2 + I_{zz} C(\phi)^2 - I_{yz} S(2\phi)) + S(2\theta) (I_{xz} C(\phi) + I_{xy} S(\phi))$$

$$\begin{aligned}
C_1 = & (I_{yy} - I_{zz}) \left(S(\phi)C(\phi)(\dot{\theta}^2 - C(\theta)^2\dot{\psi}^2) + C(\theta)\dot{\psi}\dot{\theta}(1 - 2C(\phi)^2) \right) - I_{xx}C(\theta)\dot{\psi}\dot{\theta} \\
& + I_{yz}(\dot{\theta}^2(1 - 2C(\phi)^2) + C(\theta)^2\dot{\psi}^2(2C(\phi)^2 - 1) - 2S(2\phi)C(\theta)\dot{\psi}\dot{\theta}) \\
& + I_{xy}(2S(\phi)S(\theta)\dot{\psi}\dot{\theta} - S(\theta)C(\phi)C(\theta)\dot{\psi}^2) + I_{xz}(2S(\theta)C(\phi)\dot{\psi}\dot{\theta} + S(\phi)S(\theta)C(\theta)\dot{\psi}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & (I_{yy} - I_{zz})(S(\theta)C(\theta)\dot{\psi}^2(1 - C(\phi)^2) + C(\theta)\dot{\psi}\dot{\phi}(2C(\phi)^2 - 1) - S(2\phi)\dot{\theta}\dot{\phi}) \\
& + I_{zz}S(\theta)C(\theta)\dot{\psi}^2 + I_{xx}(C(\theta)(\dot{\psi}\dot{\phi} - S(\theta)\dot{\psi}^2)) \\
& + 2I_{yz}(\dot{\theta}\dot{\phi}(2C(\phi)^2 - 1) + S(\phi)C(\phi)C(\theta)(2\dot{\psi}\dot{\phi} - S(\theta)\dot{\psi}^2)) \\
& + I_{xy}(S(\phi)(\dot{\psi}^2(1 - 2C(\theta)^2) + \dot{\phi}^2) - 2S(\phi)S(\theta)\dot{\psi}\dot{\phi}) \\
& + I_{xz}(C(\phi)(\dot{\psi}^2(1 - 2C(\theta)^2) + \dot{\phi}^2) - 2S(\theta)C(\phi)\dot{\psi}\dot{\phi})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 = & I_{xx}(S(2\theta)\dot{\psi}\dot{\theta} - C(\theta)\dot{\phi}\dot{\theta}) \\
& + I_{yy}(S(2\phi)C(\theta)^2\dot{\psi}\dot{\phi} - S(\phi)C(\phi)S(\theta)\dot{\theta}^2 + \dot{\theta}(C(\phi)^2 - 1)(S(2\theta)\dot{\psi} + C(\theta)\dot{\phi})) \\
& - I_{zz}(S(2\phi)C(\theta)^2\dot{\psi}\dot{\phi} - S(\phi)C(\phi)S(\theta)\dot{\theta}^2 + C(\theta)\dot{\phi}\dot{\theta}(2C(\phi)^2 - 1) + S(2\theta)C(\phi)^2\dot{\psi}\dot{\theta}) \\
& + I_{xy}(C(\phi)C(\theta)(\dot{\theta}^2 - \dot{\phi}^2) + 2\dot{\psi}\dot{\theta}(2S(\phi)C(\theta)^2 - S(\phi)) + S(2\theta)C(\phi)\dot{\psi}\dot{\phi}) \\
& + I_{yz}(S(\theta)\dot{\theta}^2(2C(\phi)^2 - 1) + 2C(\theta)^2\dot{\psi}\dot{\phi}(1 - 2C(\phi)^2) + S(2\phi)\dot{\theta}(2C(\theta)\dot{\phi} + S(2\theta)\dot{\psi})) \\
& + I_{xz}(S(\phi)C(\theta)(\dot{\phi}^2 - \dot{\theta}^2) + 2C(\phi)\dot{\psi}\dot{\theta}(2C(\theta)^2 - 1) - S(2\theta)S(\phi)\dot{\psi}\dot{\phi})
\end{aligned}$$

En un caso posterior se decidió suponer, como es común, que los productos inerciales son despreciables, con lo cual se obtuvieron los siguientes términos para las matrices ya indicadas.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xx}S(\theta) \\ 0 & I_{yy}C(\phi)^2 + I_{zz}S(\phi)^2 & (I_{yy} - I_{zz})C(\phi)C(\theta)S(\phi) \\ -I_{xx}S(\theta) & (I_{yy} - I_{zz})C(\phi)C(\theta)S(\phi) & I_{xx}S(\theta)^2 + C(\theta)^2(I_{yy}S(\phi)^2 + I_{zz}C(\phi)^2) \end{pmatrix}$$

$$C_1 = (I_{yy} - I_{zz}) \left(S(\phi)C(\phi)(\dot{\theta}^2 - C(\theta)^2\dot{\psi}^2) + C(\theta)\dot{\psi}\dot{\theta}(1 - 2C(\phi)^2) \right) - I_{xx}C(\theta)\dot{\psi}\dot{\theta}$$

$$C_2 = (I_{yy} - I_{zz}) \left(S(\theta)C(\theta)\dot{\psi}^2(1 - C(\phi)^2) + C(\theta)\dot{\psi}\dot{\phi}(2C(\phi)^2 - 1) - S(2\phi)\dot{\theta}\dot{\phi} \right) \\ + I_{zz}S(\theta)C(\theta)\dot{\psi}^2 + I_{xx} \left(C(\theta)(\dot{\psi}\dot{\phi} - S(\theta)\dot{\psi}^2) \right)$$

$$C_3 = I_{xx} \left(S(2\theta)\dot{\psi}\dot{\theta} - C(\theta)\dot{\phi}\dot{\theta} \right) \\ + I_{yy} \left(S(2\phi)C(\theta)^2\dot{\psi}\dot{\phi} - S(\phi)C(\phi)S(\theta)\dot{\theta}^2 + \dot{\theta}(C(\phi)^2 - 1)(S(2\theta)\dot{\psi} + C(\theta)\dot{\phi}) \right) \\ - I_{zz} \left(S(2\phi)C(\theta)^2\dot{\psi}\dot{\phi} - S(\phi)C(\phi)S(\theta)\dot{\theta}^2 + C(\theta)\dot{\phi}\dot{\theta}(2C(\phi)^2 - 1) + S(2\theta)C(\phi)^2\dot{\psi}\dot{\theta} \right)$$

2.4. Simulación de control por lógica difusa

2.4.1. Lógica difusa

La lógica clásica define la pertenencia o no de un elemento en un conjunto y clasifica una afirmación como verdadera o falsa. Sin embargo, al ser humano se le dificulta definir una verdad absoluta o la ausencia total de ésta, puesto que el lenguaje humano no se limita a una única dualidad de sentencias para realizar una afirmación. En ese orden, la lógica puede resultar útil cuando la incertidumbre existente en la transición entre un estado y otro es despreciable; pero si esa incertidumbre aumenta, la lógica clásica pierde su validez. Esto quiere decir que puede definir que el elemento X pertenece al conjunto A , pero no tiene la capacidad de afirmar con qué grado de pertenencia.

Para tratar el problema de incertidumbre y sensibilizar los modelos lógicos se han desarrollado diferentes razonamientos numéricos y no numéricos entre los cuales se destaca actualmente la lógica difusa, que se define como un método de razonamiento aproximado no probabilista que intenta recrear el razonamiento humano.

La lógica difusa utiliza como herramienta las variables lingüísticas, que se componen de múltiples conjuntos difusos, los cuales definen el grado de pertenencia de un valor u otro en su conjunto a partir de una regla semántica o función de pertenencia.

2.4.2. Sistema de control por lógica difusa

Basados en las matemáticas difusas, estos sistemas consiguen estrategias de control flexibles, sensibles a características cualitativas, siendo útiles tanto sobre modelos lineales como no lineales. Son realmente útiles en sistemas dinámicos cuyos modelos son complejos y se dispone de información aproximada sobre su comportamiento, esto permite que las acciones de control guarden relación con el conocimiento teórico y la experiencia del diseñador que no pueden ser modelados matemáticamente o que representarían una carga para el controlador, considerados por esta razón como sistemas expertos.

Estas características hacen que un control difuso sea de gran interés en la estabilización de una aeronave no tripulada, razón por la cual se ha decidido realizar un estudio de su comportamiento teórico por medio de simulaciones computacionales.

Actualmente se utilizan dos tipos de sistemas de control por lógica difusa: tipo Mamdani y tipo Takagi Sugeno.

a) **Sistema de control difuso tipo Mamdani (Fusificador y Defusificador):** este es el sistema clásico, el primero en haber sido estudiado e implementado. La arquitectura del método de inferencia por lógica difusa de Mamdani se compone de cuatro bloques:

- **Base de conocimiento:** contiene las reglas lingüísticas que definen las características de los conjuntos difusos y su relación entre ellos; puede afirmarse que se encuentra implícito en los demás bloques de la arquitectura del control.
- **Fusificación:** transformación de los valores de entrada, llamados valores crisp, en valores difusos, por medio de las funciones de pertenencia asociadas.
- **Inferencia difusa:** relaciona los conjuntos difusos de entrada y salida evaluando las reglas lingüísticas definidas, básicamente, como un conjunto de sentencias if-then.
- **Defusificación:** se encarga de adecuar los valores del conjunto difuso de salida convirtiéndolos en valores que puedan ser utilizados en las acciones de control, es decir transforma los valores difusos en valores crisp. Para esto se utilizan métodos matemáticos simples como el método del centroide, del promedio ponderado y de membresía del medio del máximo.

b) **Sistemas de control difuso tipo Takagi-Sugeno:** la principal diferencia entre el sistema Mamdani y el sistema Sugeno yace en la inferencia difusa, ya que las reglas definidas relacionan los conjuntos difusos de entrada con valores numéricos en función de las entradas del sistema.

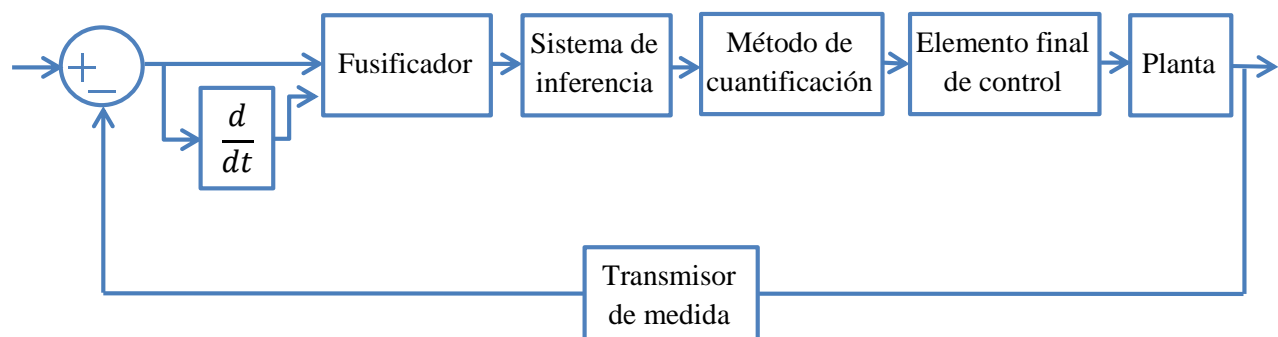
A pesar de que este sistema no se adecúa tan fielmente al conocimiento experto como el sistema Mamdani, suele ser ampliamente utilizado en tareas de optimización, y al no requerir defusificación, este método resulta ser más eficiente computacionalmente.

Buscando los beneficios del uso de un sistema difuso para el control de la aeronave y la necesidad de una velocidad de respuesta mayor se ha decidido utilizar un control tipo Takagi-Sugeno para la simulación del control de la aeronave.

2.4.3. Definición de arquitectura de control

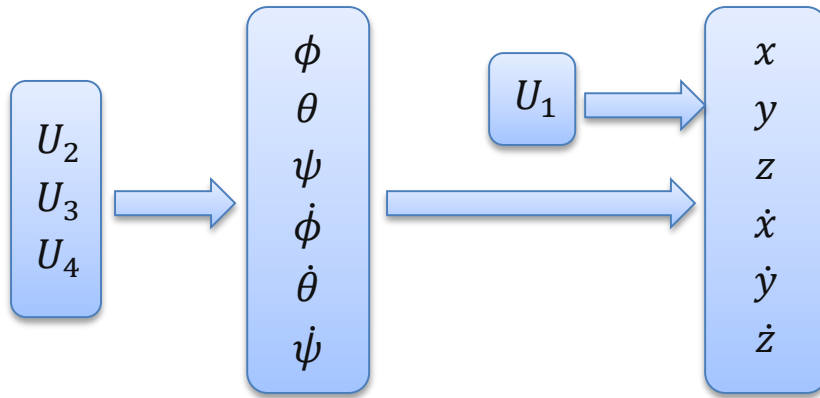
Para la arquitectura de control a utilizar se toma como entrada del sistema una referencia deseada de posición u orientación del cuadricóptero (yaw) , utilizándola para calcular el error y el cambio del error en el tiempo, los cuales serán las variables a convertir en valores difusos por el control Sugeno; posteriormente las reglas difusas del sistema de inferencia Sugeno se encargarán de convertir los valores difusos en valores reales que deberán de ser cuantificados adecuadamente como PWM para ser enviados a los ESC del cuadricóptero y así conseguir la posición y orientación (yaw) deseada para la aeronave.

Figura 7. Arquitectura de control difuso para el sistema del cuadricóptero



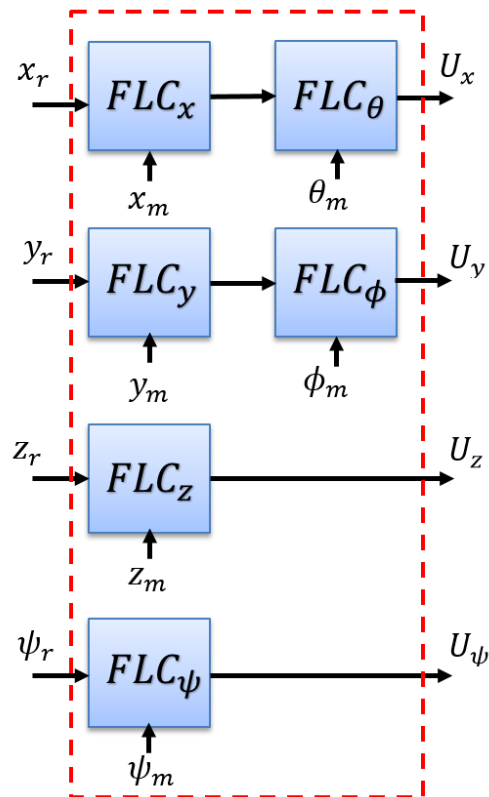
Para ejercer control sobre la aeronave se cuenta con la velocidad de rotación de los cuatro motores que generan la fuerza U_1 y los momentos U_2 , U_3 y U_4 . Los cuales influyen en el sistema como se observó en el modelo dinámico (Ec.18, Ec.22).

Figura 8. Relación entre las variables del modelo dinámico y sus entradas controlables



Teniendo en cuenta la arquitectura de control de la Figura 7 y cuáles son las relaciones existentes entre las variables al analizar el modelo dinámico, se decide utilizar seis controladores difusos, donde los controladores respectivos de las variables de posición x, θ, y y ϕ están acoplados como se muestra, dado el modelo de posición (Ec.18). Adicionalmente se define como salida del bloque de control difuso las variables U_x, U_y, U_z y U_ψ .

Figura 9. Relación entre los controladores difusos y las variables de entrada y salida



2.4.4. Definición de parámetros del sistema de control difuso

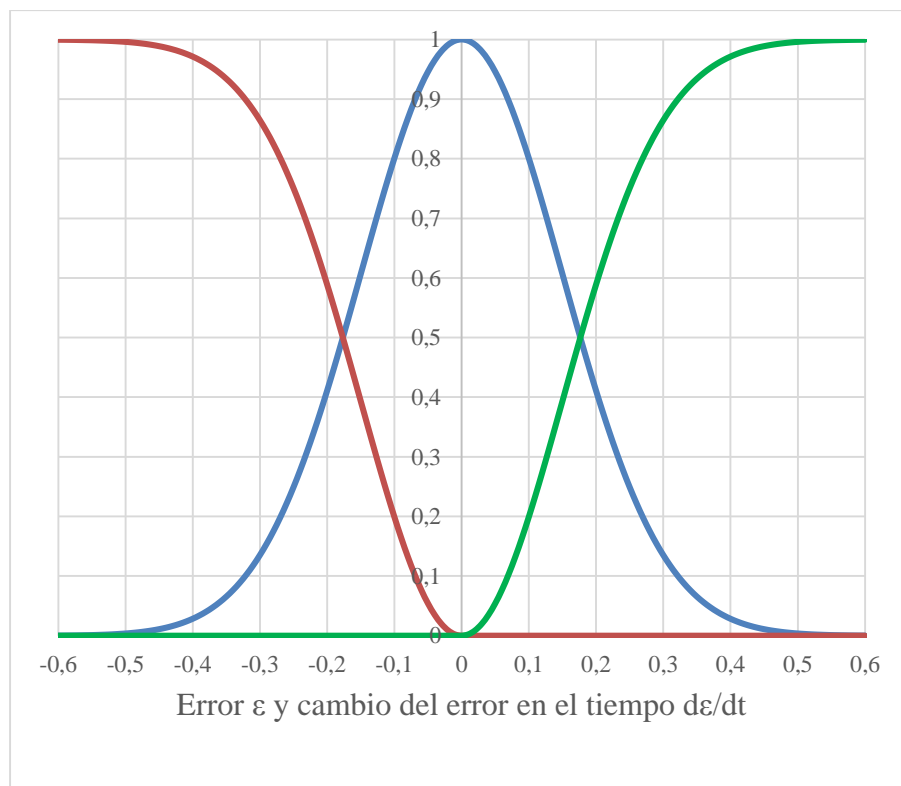
Inicialmente es imperativo determinar las funciones de membresía difusas, las cuales relacionan los valores de las variables de entrada con valores difusos.

Para este caso se han escogido funciones de membresía tipo Gaussianas de la forma.

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} \quad \text{Ec. 23}$$

Tanto para el error como para el cambio del error en el tiempo se han tomado valores $\sigma = 0,15$ y $c = 0$. De estos valores dan funciones de membresía iguales las cuales son representadas con la figura 10.

Figura 10. Función de membresía difusa para el error y para el cambio del error en el tiempo



Posteriormente se define la matriz difusa o de base de reglas del controlador difuso, esta matriz depende del tipo de salida que se desea y define cada uno de los sistemas de control difuso, dependiendo del comportamiento de las entradas generadas. Ésta se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. Base de reglas difusas

Cambio del error en el tiempo	Error			
		Positivo	Cero	Negativo
	Positivo	1	1	0
	Cero	1	0	-1
	Negativo	0	-1	-1

2.4.5. Cuantificación de PWM a partir de las salidas del control difuso

Los PWM para cada uno de los motores son cuantificados a partir de las salidas del control difuso, junto con un offset que depende del comportamiento real de cada conjunto motor hélice, para alcanzar las revoluciones necesarias que estabilicen la aeronave en ángulos roll y pitch iguales a cero. Estos se encuentran en una función de saturación la cual limita la señal a valores que puedan alcanzar los motores.

$$PWM_1 = sat(U_x + U_z - U_\psi + offset)$$

$$PWM_2 = sat(U_y + U_z + U_\psi + offset)$$

$$PWM_3 = sat(-U_x + U_z - U_\psi + offset)$$

$$PWM_4 = sat(-U_y + U_z + U_\psi + offset)$$

2.4.6. Actualización de la posición y orientación del cuadricóptero (obtención de soluciones para las ecuaciones del modelo dinámico)

La posición, orientación y velocidades del cuadricóptero real son determinadas por medio de MEMS, sin embargo para el caso de la simulación estos valores se determinarán por medio del método de los integradores, partiendo de la técnica de discretización de la derivada hacia atrás y el operador de desplazamiento.

$$\dot{q}_n = \dot{q}_{n-1} + h \cdot \ddot{q}_n$$

$$q_n = q_{n-1} + h \cdot \dot{q}_n$$

3. RESULTADOS

3.1. Simulación del modelo dinámico

Se realizó el montaje de las ecuaciones dinámicas del cuadricóptero en el software Matlab®, inicializando los parámetros según las características del modelo definidas.

Se trazaron las gráficas de las coordenadas generalizadas con respecto al tiempo, en función de la velocidad de rotación de las hélices, obteniendo particulares diferencias cuando se utilizan los dos tensores de inercias, al simular el giro no igualado de las cuatro hélices.

A continuación se muestran las gráficas de las simulaciones de ambos modelos al incrementar la velocidad de los motores de 0 RPM a 4800 RPM por medio de la respuesta a una función de tipo escalón de una función de transferencia de primer orden; con un giro disminuido en un 1% para los motores 1 y 3.

Se utilizó un periodo de muestreo de 10 ms para una simulación de 6 segundos.

Figura 11. Respuesta del modelo dinámico simplificado

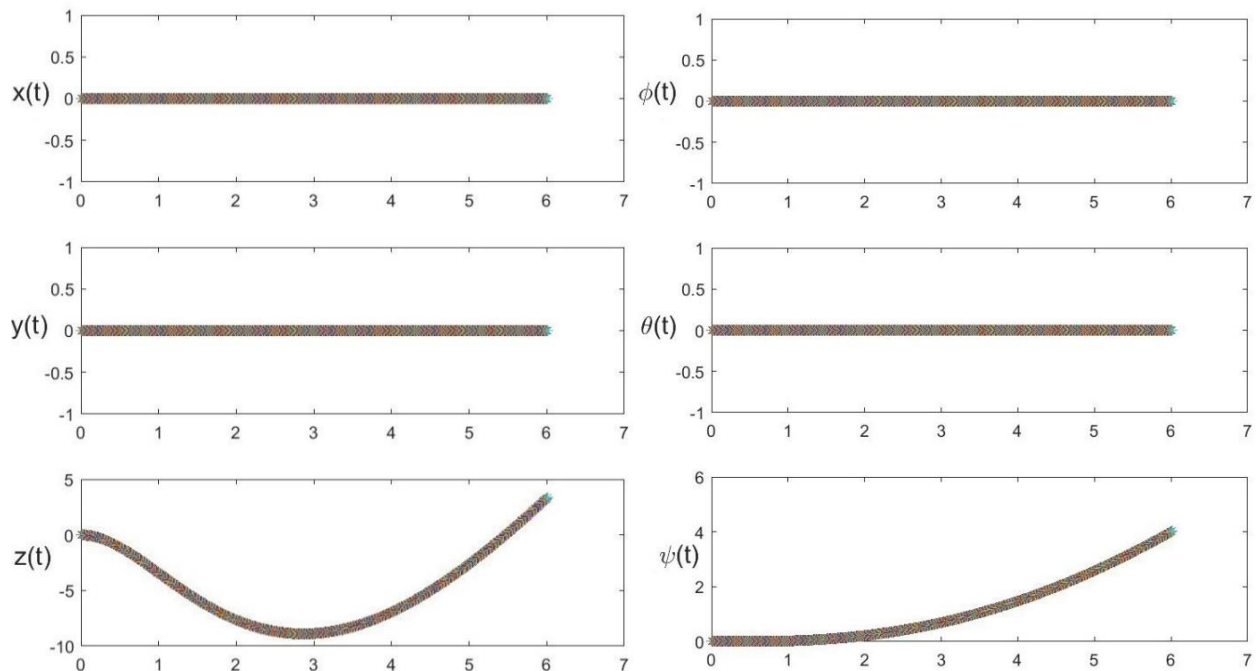
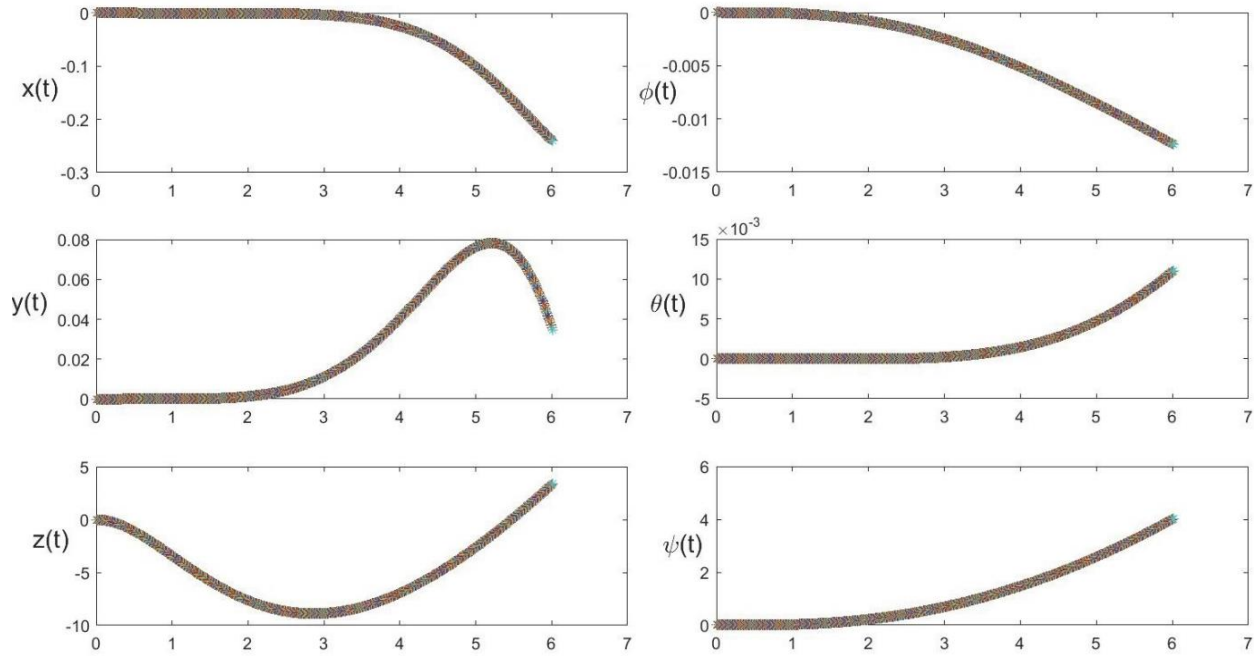


Figura 12. Respuesta del modelo dinámico completo



Se puede observar un comportamiento deseado, para el sistema simplificado ya que una disminución igual en un par de motores opuestos debería generar únicamente un giro en ψ , sin embargo se observa que para el modelo completo hay una variación en todas las variables conforme aumenta el tiempo, esto se debe a que en la realidad la geometría no es perfectamente simétrica según el tensor de inercias.

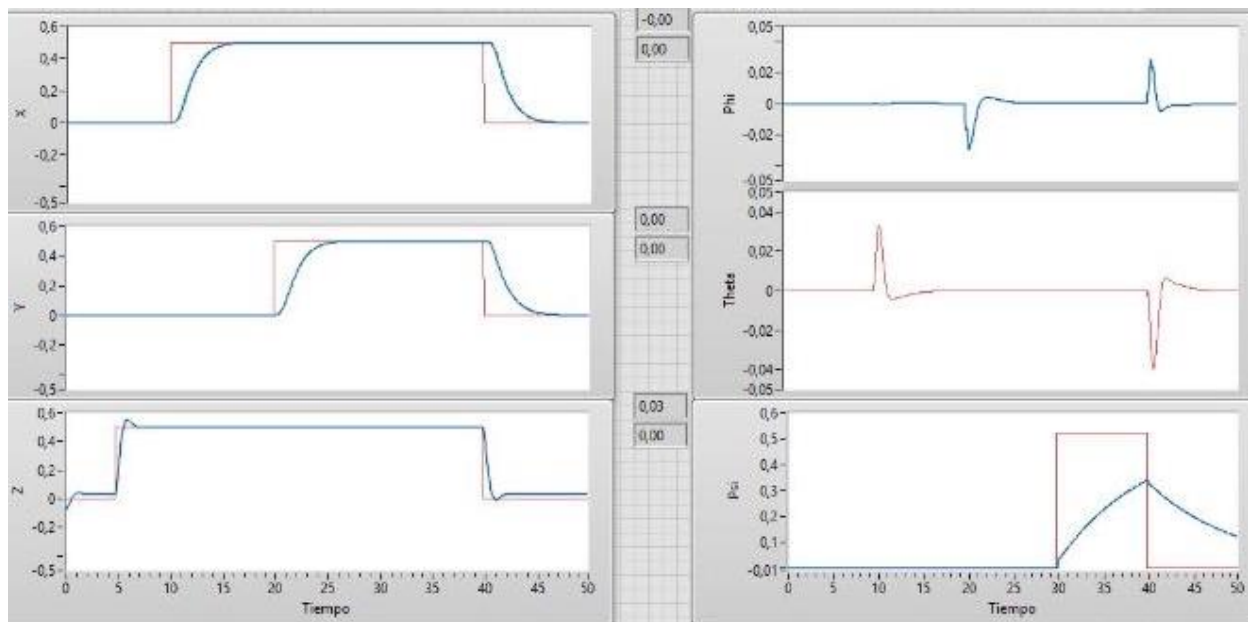
3.2. Simulación de control por lógica difusa

Para simular el sistema de control se usó el software LabVIEW® junto con la herramienta Mathscript que permite usar código de Matlab® para montar las ecuaciones de los modelos propuestos.

El periodo de muestreo fue de 50 ms (estimado con relación al costo computacional para la realización de todos los cálculos que van desde el modelo dinámico hasta la ejecución de la rutina de control) para un tiempo de simulación designado de 50 s.

Para este periodo de simulación se realizan cuatro estímulos de tipo escalón, inicialmente un desplazamiento en $z = 0,5$ m en $t = 5$ s, un desplazamiento en $x = 0,5$ m en $t = 10$ s, un desplazamiento en $y = 0,5$ m en $t = 20$ s, un giro $\psi = 0,5$ rad en $t = 30$ s y finalmente un regreso al estado inicial $x, y, z, \psi = 0$ en $t = 40$ s.

Figura 13. Respuesta del modelo dinámico completo y simplificado en lazo cerrado



Inicialmente se realizó la simulación de control según el sistema propuesto, el tiempo total de simulación se encuentra alrededor de los 60 s y difiere entre ambos modelos en 2 s, siendo mayor el tiempo de simulación para el modelo completo.

Se observa un retraso de respuesta frente a las funciones de referencia de tipo escalón para ambos sistemas de alrededor de 4,5 s en x y y , sin sobrepaso gracias a la acción derivativa del control difuso. Sin embargo la respuesta en z es alrededor de cuatro veces más veloz, por lo que la acción derivativa del controlador no consigue evitar el sobrepaso para los parámetros de la simulación. Por otra parte, la respuesta en ψ es muy lenta y no alcanza el valor de referencia en el tiempo de permanencia de la función escalón.

Las respuestas de ambos modelos fueron idénticas, razón por la cual se decidió realizar una simulación utilizando las señales de control obtenidas para controlar cada modelo con las señales de control del otro, con el objetivo de comparar sus respuestas en lazo abierto.

Figura 14. Respuesta del modelo dinámico completo frente al estímulo de control obtenido por el modelo simplificado

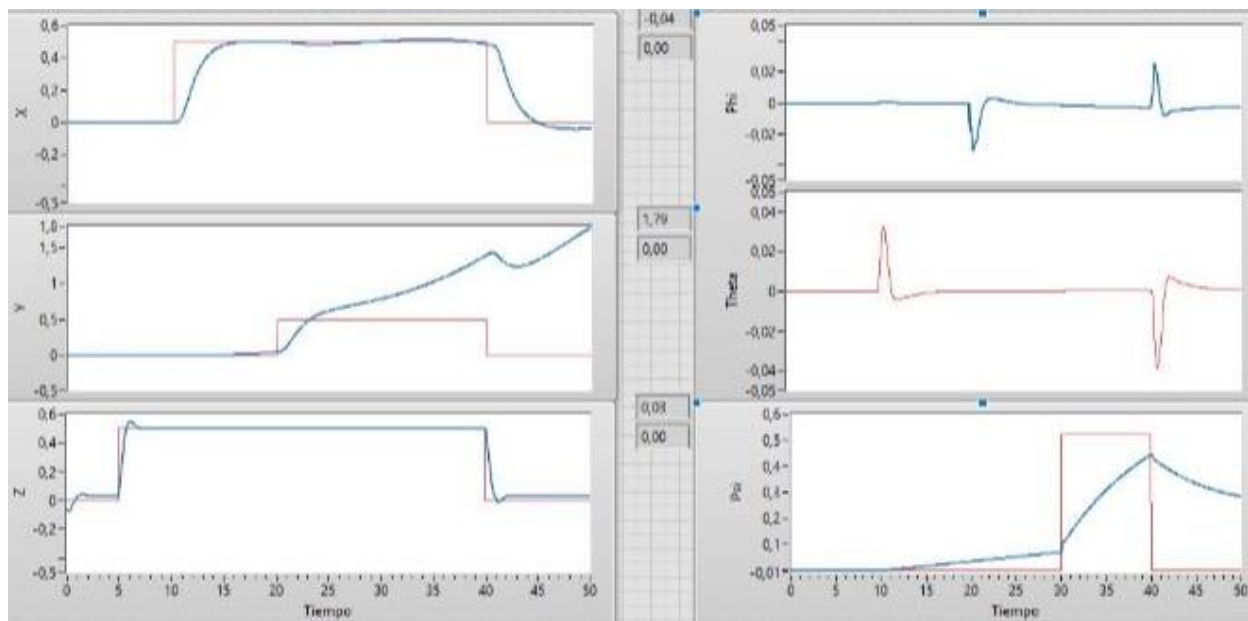
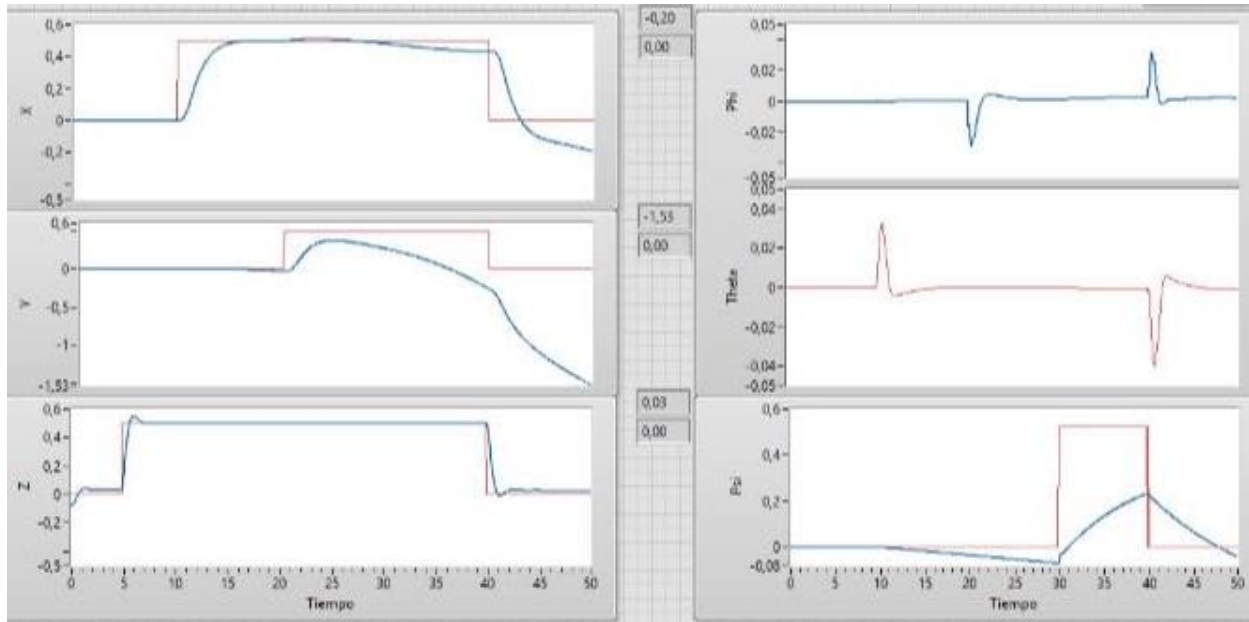


Figura 15. Respuesta del modelo dinámico simplificado frente al estímulo de control obtenido por el modelo completo



Se observa que para ambos modelos la estabilización de altura, utilizando los estímulos del control del otro modelo, son precisas, sin embargo esto no ocurre para una posición en x o y deseadas, esto es claro al tener en cuenta que los productos inerciales solo afectan al modelo rotacional, el cual definirá los ángulos ϕ y θ necesarios para desplazarse en x o y . Adicionalmente se puede afirmar que los estímulos del modelo simplificado son más fuertes para el modelo completo en el caso de la rotación necesaria para el desplazamiento en y que para el desplazamiento en x , por lo que se puede ver cómo esta posición toma valores muy opuestos en las dos simulaciones.

4. CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y APORTES

4.1. Conclusiones

El sistema dinámico del cuadricóptero es no lineal y posee ecuaciones fuertemente acopladas, este hecho hace clara la razón por la cual los cuadricópteros son sistemas diseñados para ser altamente simétricos, puesto que puede ser reducido el error al realizar simplificaciones. Adicionalmente es un sistema que tiende a desestabilizarse fácilmente por lo que sin el uso de un sistema de control realimentado la aeronave caería irremediablemente.

Es evidente la diferencia entre los dos modelos a la hora de comparar sus respuestas en el tiempo frente a las mismas entradas en lazo abierto; sin embargo, a partir del tensor de inercias determinado por medio del modelo 3D, se puede afirmar que el sistema modelado es altamente simétrico, esto se corrobora con la respuesta obtenida por las simulaciones del sistema de control difuso sobre el modelo simplificado y completo, aunque la precisión de estos valores depende en gran medida de que el ensamble de la aeronave y los materiales utilizados sean altamente uniformes e idénticos a los utilizados en el modelo 3D, agregando el hecho de que el uso de un control difuso contempla las aproximaciones y compensa la respuesta para la estabilización adecuada de la aeronave.

Por lo anterior se puede concluir que la magnitud de los productos inerciales se hace imprecisa e innecesaria al observar que la relación que guardan con los momentos inerciales (diagonal principal del tensor de inercia) es de 1 a 1000, convirtiéndose en una carga computacional y no en una ayuda significativa a la precisión de un control difuso para la estabilización.

4.2. Aportes

Por medio de este documento se realizaron los siguientes aportes:

- Se recopiló la información necesaria para la correcta comprensión de los elementos constituyentes de una aeronave no tripulada. Lo cual permitirá la selección de los componentes a ser adquiridos con el fin de construir una de estas aeronaves.

- Se mostró una metodología de ingeniería inversa necesaria para identificar los parámetros que definen la geometría y distribución de masa de un cuadricóptero. Siendo indispensables para un modelo realista de la aeronave.
- Se identificó un modelo cinemático y dinámico de un cuadricóptero, teniendo en cuenta la influencia aerodinámica, utilizando parámetros de fuentes que pueden ser utilizados en como referencia en futuros proyectos que impliquen el uso de estos aeromodelos.
- Se resaltó la influencia de la imperfecta simetría de la aeronave en el modelo dinámico de ésta, identificando las consecuencias de una incorrecta construcción y control inadecuado de un cuadricóptero. Dando luz verde al uso de un modelo, que aunque no lineal, simplificado, obteniendo de esta manera un control más eficiente en términos temporales.

4.3. Recomendaciones

- Se recomienda la construcción o adquisición de un banco de pruebas para identificar los parámetros reales del conjunto motor-hélice de este tipo de aeronaves, la cual es una importante fase en la construcción de una aeronave.
- Basado en la necesidad de identificar los coeficientes de fricción y arrastre más adecuados para cualquier estructura de este tipo de aeronaves, se recomienda la construcción de un túnel de viento, o la identificación de parámetros para simulaciones de elementos finitos y conseguir de esta manera resultados que guarden mayor relación con la realidad.
- Estudiar la generación de trayectorias para el desplazamiento de la aeronave en el espacio de una forma fluida y estable.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Brian L., Stevens, Frank L., Lewis y Eric N., Johnson. (2015). *Aircraft Control and Simulation: Dynamics, Controls Design, and Autonomous Systems*. Third Edition. New Jersey, United States.
- [2] García Rodríguez, Ramón Andrés. (Sin fecha). Herramienta para la simulación integrada de subsistemas en un equipo quadrotor. Recuperado de <http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/4921>.
- [3] Martín A. Pucheta, Claudio J. Paz y Maira E. Pereyra. (2014). *Representaciones cinemáticas de orientación y ecuaciones de estimación*. Asociación Argentina de mecánica Computacional Vol XXXIII, San Carlos de Bariloche, p. 2303-2324
- [4] Guilherme Vianna Raffo. (2007). *Modelado y control de un helicóptero quadrotor*. Tesis para Master en Automática, Robótica y Telemática. Universidad de Sevilla, Sevilla, España.
- [5] Ruiz Delgado, Manuel. (2010). *Cinemática del sólido*. Mecánica 1, Tema 2.
- [6] Stephen T. Thornton, Jerry B. Marion. (2003) *Classical dynamics of particles and systems*, Fifth Edition. Maryland, United States.
- [7] Moyano Diaz, Sergio. (2014). *Diseño y construcción de un quadcopter*. Barcelona, España.
- [8] Raza, Syed Ali y Gueaieb, Wail. Casolo, Federico (Ed.) (2010). *Intelligent Flight Control of an Autonomous Quadrotor, Motion Control*, ISBN: 978-953-7619-55-8, InTech. Recuperado de <http://www.intechopen.com/books/motion-control/intelligent-flight-control-of-an-autonomous-quadrotor>.
- [9] Sevilla Fernandez, Luis. (2014). *Modelo y control de un cuadricóptero*. Universidad Pontificia Comillas. Madrid, España.
- [10] Gheorghită, Daniel. Vîntu, Ionuț. Mirea, Letiția. Brăescu, Cătălin. (2015) *Quadcopter control system modelling and implementation*. 19th International Conference on System Theory, Control and Computing, Romania.
- [11] Chovancová, Anežka. Fico, Tomáš. Chovanec, Ľuboš. Hubinský, Peter. (2014) *Mathematical Modelling and Parameter Identification of Quadrotor (a survey)*. Bratislava, Slovakia.
- [12] Castillo P., Garcia, P., Lozano, R., Albertos, P. (2007). *Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores*. Valencia, España.
- [13] Ferrarese, Gastone. Giulietti, Fabrizio. Avanzini, Giulio. (2013) *Modeling and Simulation of a Quad-Tilt Rotor Aircraft*. Forti, Italia.

- [14] Reglamentos Aeronáuticos de Colombia. (2017). Recuperado de <http://www.aerocivil.gov.co/AAeronautica/Rrglamentacion/CINAeronauticas/Biblioteca%20Conceptos%20Interpretativos/AEREOS%20NO%20TRIPULADOS-UAVS-OPERACION.pdf>
- [15] Gonzáles, Carlos. (Sin fecha). *Lógica Difusa*.
- [16] Prof. Z. S. Spakovszky. (2006). *Thermodynamics and Propulsion*. MIT. Massachusetts, United States.
- [17] Olfati-Saber, Reza. (2001). *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*. MIT. Massachusetts, United States.
- [18] Hedeager Pedersen, Anders. (2006). *Test and Modelling of Four Rotor Helicopter Rotors*. DTU. Dinamarca.
- [19] Luukkonen, Teppo. (2011). *Modelling and control of quadcopter*. Espoo, Finlandia.
- [20] Brandt, John B., Deters, Robert W., Ananda Gavin K. y Selig, Michael S. (2015) *UIUC Propeller data site*. Illinois, United States.
- [21] McAndrew R. Ian, Navarro, Elena y Witcher, Ken. (2018). *Propeller Design Requirements for Quadcopters Utilizing Variable Pitch Propellers*. International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing, Vol. 6, No. 1,
- [22] Solchaga Pérez de Lazárraga, Gonzalo. Corres Sanz, Jesús María. (2015). *Control motor brushless sensorless*. Navarra, España.
- [23] Moore, Aaron. (2008). *Lithium polymer (LiPo) Battery*. Recuperado de https://revotics.com/articles/lithium_polymer_lipo_battery_guide?v=42983b05e2f2.
- [24] Trusov, Alexander A. (2011). *Overview of MEMS Gyroscopes: History, Principles of Operations, Types of Measurements*. University of California. United States
- [25] Dadafshar, Majid. (2014). *Accelerometer and gyroscopes sensors: Operation, sensing and applications*.
- [26] Gutiérrez, Federico. Pérez, Wilson. Mesa, Carlos A. (2016) *Modelamiento dinámico y simulación de sistemas de control en un helicóptero quadrotor*. Pereira, Colombia.